Générateurs de $GL(E)$ et de $SL(E)$

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$.

Lemme 1. *On suppose E de dimension $n \geqslant 2$. Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$. Il existe une transvection u ou un produit de deux transvections uv, tel que $u(x) = y$ ou $uv(x) = y$.*

Démonstration.

Supposons x et y non colinéaires. On cherche u sous la forme $u(x) = x + f(x)a$. On prend $a = y - x$ et H un hyperplan contenant a mais pas x. Soit $f \in L(E)$ tel que $H = \mathrm{Ker}(f)$ et $f(x) = 1$. On peut alors prendre $u = Id_E + fa$.
Si x et y sont colinéaires, on prend z non colinéaire, et on trouve, par ce qui précède, des transvections u, v telles que $u(x) = z$ et $v(z) = y$. □

Théorème 2. *Les transvections engendrent $SL(E)$.*

Démonstration.

On va montrer le résultat par récurrence sur n. Pour $n = 1$, le résultat est clair car $SL(E) = \{Id_E\}$.

Supposons que $n \geqslant 2$. Soient $u \in SL(E)$ et $x \in E \setminus \{0\}$. Grâce au Lemme 1, quitte à remplacer u par vu où v est un produit de transvections, on peut supposer que $u(x) = x$.
On note D la droite engendrée par x et $\pi : E \to E/D$ la projection canonique et $\overline{u} : E/D \to E/D$ l'automorphisme induit par u.
Montrons tout d'abord qu'on a $\overline{u} \in SL(E/D)$. Pour cela, on prend une base $e = (x, e_2, \dots, e_n)$ de E, de sorte que $\overline{e} = (\pi(e_2), \dots, \pi(e_n))$ est une base de E/D. Si on note M la matrice de u dans la base e et $\overline{M}$ la matrice de $\overline{u}$ dans la base $\overline{e}$, on a que $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & \overline{M} \end{smallmatrix}\right)$. Développer son déterminant par rapport à la première colonne montre qu'on a $\det(\overline{u}) = \det(u) = 1$, donc que $\overline{u} \in SL(E/D)$.
On applique alors l'hypothèse de récurrence à $\overline{u}$. On a donc $\overline{u} = \overline{\tau_1} \cdots \overline{\tau_r}$, où les $\overline{\tau_i}$ sont des transvections. On écrit alors, pour tout $\overline{y} \in E/D$, $\overline{\tau_i}(\overline{y}) = \overline{y} + \overline{f_i}(\overline{y})\overline{a_i}$ avec $\overline{f_i} \in L(E/D)$ et $\overline{a_i} \in \mathrm{Ker}(\overline{f_i}$. Soient alors $a_i \in E$ tel que $\pi(a_i) = \overline{a_i}$ et $f_i \in L(E)$ définie par $f_i = \overline{f_i} \circ \pi$. Posons alors, pour tout $y \in E$, $\tau_i(y) = y + f_i(y)a_i$.
Il est clair que τ_i induit $\overline{\tau_i}$ sur E/D. De plus, comme $f_i(x) = \overline{f_i} \circ \pi(x) = 0$, on a $\tau_i(x) = x$. Posons alors $v = \tau_1 \cdots \tau_r$, on a $v(x) = x = u(x)$ et $\overline{v} = \overline{u}$. On en déduit ainsi que $v^{-1}u$ est une transvection, de sorte que u est un produit de transvections. □

Théorème 3. *Les transvections et les dilatations engendrent $GL(E)$.*

Démonstration.

Soit $u \in GL(E)$ avec $\det(u) = \lambda$, et soit v une dilatation de rapport λ^{-1}.
Alors vu est dans $SL(E)$, et u est produit de la dilatation v^{-1} et de transvections. □

Références

[Per96] Daniel Perrin. *Cours d'Algèbre.* Ellipses, 1996